

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 3(4) - 2(2) + 1 = 9$$

پس مختصات نقطه تماس به صورت $A(2, 9)$ است و داریم:

$$f'(x) = 6x - 2 \Rightarrow f'(2) = 10 \Rightarrow m = 10$$

پس شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ برابر ۱۰ است و بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر خواهد بود:

$$y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11 \xrightarrow{x=0} y = -11$$

پس عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی برابر (-11) است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

$$(g \circ f)'(3) = f'(3)g'(f(3)) = 2g'(2) = 2 \times 4 = 8$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

تابع مشتق دوم تابع f را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = 2\sqrt{x+2} + \frac{2x}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$f''(2) = \frac{1}{2} + \frac{2 - \frac{2}{2}}{2+2} = \frac{7}{8}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

$$f(x) = (x^2 + 2)^2(x + 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x)(x^2 + 2)(x + 3)^2 + 2(x + 3)^2(x^2 + 2)^2$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2(2)(3)(64) + 2(16)(9) = 1200$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

$$y = \left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^y \Rightarrow y' = y \left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{y-1} \left(\frac{3-2}{(2x+1)^2}\right) \Rightarrow y'(2) = y \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{y-1} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right) = \frac{y^y}{\Delta^{\Delta}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

ابتدا تابع ضابطه $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2}}{x - \sqrt{x^4}} = \frac{x - \sqrt{x^2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2} - x)} = \frac{-1}{\sqrt{x}} = -x^{-\frac{1}{2}}$$

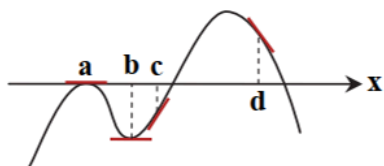
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(-1) = \frac{3}{9}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است. در نقاط داده‌شده با توجه به شکل داریم:



$$x = a : f(a) = f'(a) = 0$$

$$x = b : f(b) < 0, f'(b) = 0 \Rightarrow f(b) < f'(b)$$

$$x = c : f(c) < 0, f'(c) > 0 \Rightarrow f(c) < f'(c)$$

$$x = d : f(d) > 0, f'(d) < 0 \Rightarrow f(d) > f'(d) \quad \checkmark$$

بنابراین در نقطه $x = d$ شرط خواسته‌شده برقرار است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸

نکته: اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ ، آنگاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه: $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$$

ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

اکنون معادله داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 2f'(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2(2x - 4) \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 6, x = 2$$

با توجه به گزینه‌ها، $x = 6$ جواب سؤال است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹

نکته: اگر تابع f در $x = a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست:

(۱) f در a پیوسته نباشد.

(۲) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

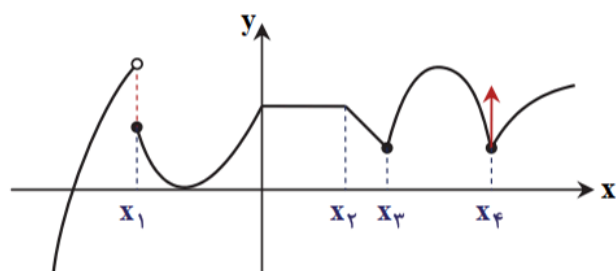
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

تابع f در ۵ نقطه به طول‌های x_1, x_2, x_3, x_4 مشتق ندارد؛ زیرا تابع در x_1 ناپیوسته است.

نقاط به طول $x = 0, x_2$ و x_3 نقطه گوشه‌ای هستند و مشتق راست و چپ نابرابرند.

همچنین در نقطه به طول x_4 مشتق راست و چپ نامتناهی هستند. (مماس قائم)



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}, \quad g(a) \neq 0.$$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \\ f'(x) &= \frac{(\sqrt{4x+1})'(x^3-2x-5) - (x^3-2x-5)'(\sqrt{4x+1})}{(x^3-2x-5)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{\left(\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\right)(x^3-2x-5) - (3x^2-2)(\sqrt{4x+1})}{(x^3-2x-5)^2} \\ \Rightarrow f'(2) &= \frac{\left(\frac{4}{2\sqrt{9}} \times -1\right) - (10 \times \sqrt{9})}{(-1)^2} = -\frac{2}{3} - 30 = -\frac{92}{3} \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

در تابع $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$ شیب خط مماس بر تابع $f'(x)$ ، برابر $f''(x)$ است. پس مشتق دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2x - \frac{3}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 - \left(\frac{-(2x)(3)}{(x^2)^2}\right) \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{6}{x^3}$$

اکنون معادله $f''(x) = 8$ را حل می‌کنیم:

$$2 + \frac{6}{x^3} = 8 \Rightarrow \frac{6}{x^3} = 6 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = a \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x = a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

با توجه به نکات، داریم:

$$[-1, 2] \quad \text{آهنگ تغییر متوسط در بازه} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(8-6) - (-1+3)}{3} = 0.$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -2$ برابر با $f'(-2)$ است:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(-2) = 9$$

پس اختلاف آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای برابر ۹ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ ، آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

از طرفین رابطه داده شده مشتق می گیریم:

$$g(x^3 - 1) = f(x^3 - x) + \sqrt{x} \Rightarrow 3x^2 g'(x^3 - 1) = (3x - 1)f'(x^3 - x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

برای اینکه $g'(\cdot)$ را به دست آوریم کافی است، در رابطه بالا، به جای x ، عدد یک را قرار دهیم؛ زیرا:

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 3g'(\cdot) = (1)f'(\cdot) + \frac{1}{2\sqrt{1}} \xrightarrow{f'(\cdot) = \frac{1}{2}} 3g'(\cdot) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 3g'(\cdot) = \frac{3}{2} \Rightarrow g'(\cdot) = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۴

نکته: مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

طبق نکته فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{1}{6} \times f'(3) = \frac{1}{6} \times 24 = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

نکته (قضیه): اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: اگر تابع f در نقطه ای به طول a مشتق پذیر باشد، مشتق چپ و راست تابع در این نقطه برابر است.

نکته: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم»

بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

اولاً تابع f باید در $x = -1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt[3]{4x - 4x^3} \Rightarrow a - b = \sqrt[3]{-4 + 4} \Rightarrow a = b$$

ثانیاً باید مشتق راست و چپ تابع در $x = -1$ برابر باشند.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > -1 \\ \frac{4 - 12x^2}{3\sqrt[3]{(4x - 4x^3)^2}} & x < -1 \end{cases}$$

مشتق راست تابع f در $x = -1$ برابر با $f'_+(-1) = -2a + b$ است، اما تابع f در $x = -1$ مشتق چپ ندارد، زیرا $x = -1$ ریشه مخرج کسر

مشتق تابع f است. به عبارت دیگر مشتق چپ تابع f در $x = -1$ نامتناهی است و امکان ندارد تابع f در $x = -1$ مشتق پذیر شود.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a ، برابر مشتق آن تابع در a است.
نکته: شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد، یعنی m_{AB} ، از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

معادله خط d را به کمک دو نقطه $(0, 2)$ و $(3, 0)$ به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3} \xrightarrow{(0, 2) \in d} y = -\frac{2}{3}x + 2$$

خط d بر تابع f در $x = 1$ مماس است، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \Rightarrow f(1) = \frac{4}{3} \\ m = -\frac{2}{3} &\Rightarrow f'(1) = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2f(1) + 3f'(1) = \frac{2}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۷

نکته: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ ، آنگاه:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\text{نکته: } (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نکته: اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

ابتدا داریم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f''(x) = 12x - 6$$

برای پیدا کردن باقی‌مانده $f'(x)$ بر $f''(x)$ یعنی عبارت $12x - 6$ ، کافی است $f'(\frac{1}{6})$ را به دست آوریم:

$$12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = 6(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 4 = \frac{3}{2} - 3 + 4 = \frac{5}{2}$$

پس باقی‌مانده تقسیم f' بر f'' برابر $\frac{5}{2}$ است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸

از حد داده شده می‌فهمیم که $f(2) = 3$ و $f'(2) = \frac{1}{4}$ است.

معادله خط مماس در نقطه $(2, 3)$ با شیب $\frac{1}{4}$ به صورت $y - 3 = \frac{1}{4}(x - 2)$ است. برای یافتن عرض از مبدأ خط مماس باید $x = 0$ قرار دهیم:

$$y = \frac{x}{4} + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

کافیہ از عامل صفر شونده مشتق بگیریید. 

۱۹

حاصل حد برابر مشتق تابع f در $x = \frac{1}{2}$ است. در ضمن، در صورت کسر، عبارت $(2x - 1)$ عامل صفر شونده است، پس:

$$x = \frac{1}{2} : f'(x) = \frac{(2) \log_2(2x + 1)}{1 + \sin \pi x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \log_2 2}{1 + \sin \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times 1}{1 + 1} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

ضابطه تابع خطی f به صورت $f(x) = ax + b$ است، بنابراین:

۲۰

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(xf(x)) = axf(x) + b = ax(ax + b) + b$$

$$\rightarrow f(xf(x)) = a^2 x^2 + abx + b = x^2 - x - 1 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = x - 1 \rightarrow f'(x) = 1 \rightarrow f(2) + f'(2) = 1 + 1 = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به نمودار تابع f و در نظر گرفتن این نکته که در هر نقطه از نمودار، شیب خط مماس بر نمودار برابر با مشتق تابع در آن نقطه است، به نتایج زیر می‌رسیم:

(۱) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقاط F, B, H و برابر صفر است؛ پس مشتق در این نقاط صفر است.

(۲) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقاط A و G مثبت است؛ پس مشتق در این نقاط مثبت است.

(۳) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقاط E, D, C و I منفی است؛ پس مشتق در این نقاط منفی است.

به طور خلاصه می‌توان جدول زیر را رسم کرد.

نقطه	A	B	C	D	E	F	G	H	I
f'	+	۰	-	-	-	۰	+	۰	-
f	۰	+	+	۰	-	-	-	۰	-

گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نادرست است. $f' \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f' > 0 \rightarrow A, G \\ f' = 0 \rightarrow B, F, H \end{cases} \xrightarrow{U} \text{پنج نقطه}$

۲ نادرست است. $f \times f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \rightarrow A, D, H \\ f' = 0 \rightarrow B, F, H \end{cases} \xrightarrow{U} \text{پنج نقطه}$

۳ درست است. برای آن که $\frac{f}{f'} > 0$ باشد، دو حالت داریم: $\begin{cases} f > 0 \rightarrow B, C \\ f' > 0 \rightarrow A, G \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$ **حالت اول**

پس در دو نقطه $\frac{f}{f'} > 0$ است. $\begin{cases} f < 0 \rightarrow E, F, G, I \\ f' < 0 \rightarrow C, D, E, I \end{cases} \xrightarrow{\cap} (E, I)$ **حالت دوم** دو نقطه (E, I)

۴ نادرست است. با حرکت روی نمودار تابع از E تا F ، مشتق از مقادیر منفی به صفر می‌رسد؛ پس این طور نیست که مشتق از A تا F همواره کاهش یابد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

با توجه به نمودار تابع f ، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ تابع در بازه $[-1, 0]$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در $x = -1$ مماس قائم دارد و در نتیجه در این نقطه مشتق برابر با بی‌نهایت می‌شود (وجود ندارد).

۲ تابع در بازه $[0, 1]$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در $x = 0$ پیوستگی راست و در نتیجه مشتق راست ندارد.

۳ تابع در بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر است، زیرا در بازه $(1, 2)$ مشتق‌پذیر است و در $x = 2$ نیز مشتق چپ (نیم‌مماس چپ با شیب غیر بی‌نهایت) دارد.

۴ تابع در بازه $[2, 4]$ مشتق‌پذیر نیست، چون در $x = 4$ مماس قائم دارد و در نتیجه در این نقطه مشتق برابر با بی‌نهایت است (وجود ندارد).

پس ۳ جواب است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۳

گام اول: ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

توجه کنید که مخرج کسر ریشه ندارد؛ پس می‌توان آن را بدون هیچ محدودیتی ساده کرد.

گام دوم: حال از f مشتق می‌گیریم و در مشتق، x را برابر با ۳ قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴

گام اول: خط d بر نمودار تابع f در $x = 0$ مماس است، پس شیب خط d برابر با $f'(0) = m_d$ است، یعنی $f'(0) = m_d$ هم‌چنین این خط در $x = 3$ بر نمودار تابع g مماس است؛ پس $g'(3) = m_d$ است.

گام دوم: نتایج گام اول را در تساوی $2f'(0) + g'(3) = 6$ جای‌گذاری می‌کنیم تا m_d به دست آید.

$$\frac{f'(0)=m_d}{g'(3)=m_d} \rightarrow 2m_d + m_d = 6 \Rightarrow 3m_d = 6 \Rightarrow m_d = 2$$

گام سوم: خط d با شیب $m_d = 2$ از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند. معادله این خط را می‌نویسیم.

$$y - 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2$$

گام چهارم: خط d و نمودار تابع g در $x = 3$ نقطه مشترک دارند؛ پس برای به دست آوردن $g(3)$ ، در معادله خط d ، x را برابر با ۳ قرار می‌دهیم.

$$g(3) = y(3) = 2 \times 3 + 2 = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵

گام اول: ابتدا $f'(x)$ و $f''(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad (1)$$

$$f''(x) = 6x + 2a \quad (2)$$

گام دوم: طبق صورت سؤال داریم:

$$\left. \begin{aligned} f'(0) = 1 &\xrightarrow{(1)} 3 \times 0^2 + 2a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1 \\ f''(0) = 4 &\xrightarrow{(2)} 6(0) + 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 & (3) \\ f''(x) = 6x + 4 & (4) \end{cases}$$

گام سوم: حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{(4)} f''(-1) = 6(-1) + 4 = -2$$

$$\Rightarrow f'(\underbrace{f''(-1)}_{-2}) = f'(-2) \xrightarrow{(3)} 3(-2)^2 + 4(-2) + 1 = 5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازه $[1, 2]$ به دست می‌آوریم.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{2^2 + 2}{2} - \frac{1^2 + 2}{1}}{1} = 3 - 3 = 0$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در هر نقطه برابر با مشتق تابع در آن نقطه است؛ بنابراین باید مشتق تابع را برابر با صفر قرار دهیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تنها $x = \sqrt{2}$ در بازه $[1, 2]$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = (x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1)$$

$$f'(x) = ((x^2 + 1)^2)'(\Delta x - 1) + (x^2 + 1)^2 (\Delta x - 1)' = 2 \times 2x \times (x^2 + 1) \times (\Delta x - 1) + \Delta(x^2 + 1)^2$$

گام دوم: $x = 0$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = \underbrace{2 \times 2(0) \times (0^2 + 1)^2 \times (\Delta \times 0 - 1)}_{\text{صفر}} + \Delta(0^2 + 1)^2 = \Delta$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = 2x^2 + ax + b$$

$$f'(x) = 4x + a$$

گام دوم: حال تابع $f'of$ را تشکیل می‌دهیم و آن را برابر با $8x^2 - 12x - 6$ قرار می‌دهیم.

$$f'of(x) = f'(f(x)) = 4f(x) + a = 4(2x^2 + ax + b) + a = 8x^2 + 4ax + 4b + a$$

$$\xrightarrow{(f'of)(x)=8x^2-12x-6} \begin{cases} 4a = -12 \Rightarrow a = -3 \\ 4b + a = -6 \xrightarrow{a=-3} 4b - 3 = -6 \Rightarrow \begin{cases} 4b = -3 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: خواسته سؤال $4 = \frac{a}{b} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم تا $f'(x)$ به دست آید.

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$$

$$f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

گام دوم: از تابع f' دوباره مشتق می‌گیریم تا $f''(x)$ به دست آید.

$$f''(x) = -2(-2x^{-3}) = \frac{4}{x^3}$$

گام سوم: حال تابع $(f' - f'')(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس $x = 2$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(f' - f'')(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \xrightarrow{x=2} (f' - f'')(2) = -\frac{2}{2^2} - \frac{4}{2^3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

پاسخ تشریحی

گام اول: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$ در بازه $[1, 4]$ برابر است با:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 + \frac{2}{4^2} - (1 + \frac{2}{1^2})}{3} = \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

گام دوم: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = \alpha$ برابر با $f'(\alpha)$ است.

$$f(x) = x + 2x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 4x^{-3} \Rightarrow f'(\alpha) = 1 - \frac{4}{\alpha^3} \quad (2)$$

گام سوم: از برابر قراردادن (۱) و (۲) داریم:

$$1 - \frac{4}{\alpha^3} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{\alpha^3} = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{32}{5} \quad (3)$$

گام چهارم: حاصل $\alpha^3 f(\alpha)$ را حساب می‌کنیم.

$$\alpha^3 f(\alpha) = \alpha^3 \left(\alpha + \frac{2}{\alpha^2} \right) = \alpha^3 + 2 \xrightarrow{(3)} \alpha^3 f(\alpha) = \frac{32}{5} + 2 = \frac{42}{5} = 8 \frac{2}{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۱

پاسخ تشریحی گام اول: از آن جایی که خط $g(x) = 2x + 4$ در نقطه $x = -1$ بر نمودار تابع f مماس است، پس مقدار دو تابع و همچنین شیب خط مماس و مشتق تابع در نقطه تماس برابرند؛ در نتیجه:

$$f(-1) = g(-1) = 2(-1) + 4 = 2 \quad (1)$$

$$f'(-1) = g'(-1) = 2 \quad (2)$$

گام دوم: از ضابطه تابع $h(x) = xf(-\frac{4}{x^2})$ مشتق می گیریم.

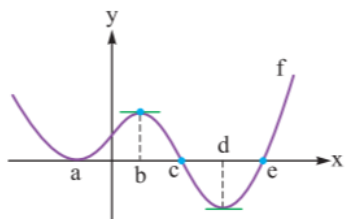
$$h'(x) = \underbrace{\left(-\frac{4}{x^2}\right)' f\left(-\frac{4}{x^2}\right)}_{(1)} + x \underbrace{\left(f\left(-\frac{4}{x^2}\right)\right)'}_{(2)} = f\left(-\frac{4}{x^2}\right) + x \times 2x^{-3} \times f'\left(-\frac{4}{x^2}\right) = f\left(-\frac{4}{x^2}\right) + 2x^{-2} f'\left(-\frac{4}{x^2}\right) \quad (3)$$

توجه کنید که برای محاسبه $\left(-\frac{4}{x^2}\right)'$ کافی است آن را به صورت $(-4x^{-2})'$ بنویسید و سپس از رابطه $(kx^n)' = knx^{n-1}$ استفاده کنید.

گام سوم: حال با جای گذاری $x = 2$ در (۳)، داریم:

$$h'(2) = f\left(-\frac{4}{2^2}\right) + 2(2)^{-2} f'\left(-\frac{4}{2^2}\right) = f(-1) + 2f'(-1) \xrightarrow{(2), (1)} h'(1) = 2 + 2 \times 2 = 6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



پاسخ تشریحی با توجه به نمودار f ، واضح است که مقدار تابع در $x = c$ ، $x = a$ و $x = e$ برابر صفر و مقدار مشتق تابع در $x = a$ ، $x = b$ و $x = d$ برابر صفر می شود، پس در نقاط $x = e$ ، $x = d$ ، $x = c$ ، $x = b$ و $x = a$ ، یعنی در چهار نقطه، از میان مقدار تابع و مقدار مشتق، فقط یکی برابر صفر می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: ضابطه مشتق اول و مشتق دوم f را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^2 + a(x - b) \Rightarrow f(x) = x^2 + ax - ab \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) = 2x + a \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x) = 2$$

گام دوم: نمودار تابع f در $x = 2$ بر نمودار تابع مشتق خود، یعنی f' ، مماس است، پس طبق درس نامه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(2) = f'(2) \\ f'(2) = f''(2) \end{cases} \xrightarrow{f(2)=4+2a-ab, f'(2)=4+a, f''(2)=2} \begin{cases} 4+2a-ab=4+a \quad (I) \\ 4+a=2 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

گام سوم: با جای گذاری $a = -2$ در (I) داریم:

$$4+2a-ab=4+a \Rightarrow 4-4+2b=4-2 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 2x + 2$ می شود.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f(-2) = 4 + 4 + 2 = 10$$

گام چهارم: در آخر مقدار $f(a) = f(-2)$ را محاسبه می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۲

۳۳

پاسخ تشریحی

۳۴

گام اول: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[4, 8]$ برابر است با:

$$\frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{8\sqrt{8-4} - 4\sqrt{4-4}}{8-4} = \frac{16}{4} = 4$$

گام دوم: از f مشتق می گیریم:

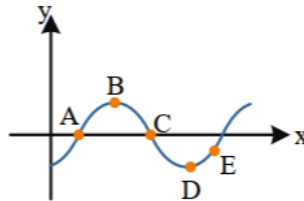
$$f(x) = x\sqrt{x-4} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt{x-4} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$$

$$f'(8) = 1 \times \sqrt{8-4} + 8 \times \frac{1}{2\sqrt{8-4}} = 2 + \frac{8}{4} = 2 + 2 = 4$$

پس آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x = 8$ برابر است با:بنابراین جواب برابر $1 = \frac{4}{4}$ می شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نقطه	A	B	C	D	E
f	•	+	•	-	-
f'	+	•	-	•	+

در نقاط B و C مقدار مشتق تابع از مقدار تابع کمتر است.

۳۵

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

با توجه به تعریف مشتق داریم:

۳۶

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2\sqrt{x} - 4) \times \sqrt{x+4}}{|x+4|} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}-2)\sqrt{x+4}}{|x+4|(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2 \times 2}{8 \times 4} = \frac{1}{8}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

شیب نقاط A و E مثبت و از طرفی شیب نقطه A از E بیشتر است. (چون خط مماس در نقطه A با محور افق زاویه بیشتری می سازد.)

۳۷

شیب نقاط B و D برابر صفر است. (چون در این نقاط خط موازی محور x ها بر تابع مماس شده است.)شیب نقطه C نیز منفی است، پس بین تمامی نقاط دارای کمترین شیب است.در نهایت داریم: $m_C < m_D = m_B < m_E < m_A$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

طبق نمودار داریم:

۳۸

$$\begin{cases} f'(A) < 0 & f(A) > 0 \\ f'(B) = 0 & f(B) < 0 \\ f'(C) > 0 & f(C) < 0 \\ f'(D) = 0 & f(D) = 0 \end{cases}$$

در گزینه ۳ $\underbrace{f'(C)}_{+} < \underbrace{f(B)}_{-}$ نادرست است. بقیه درست اند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۹

زاویه خط با جهت مثبت محور x ها برابر 45° است. سپس:

$$m = \tan 45^\circ = 1 \rightarrow f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$f(4) = 6$$

خط مماس از نقطه $(4, 6)$ عبور می‌کند. پس:
حال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{(x - 4)} \times \frac{1}{x + 4}}{1} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۰

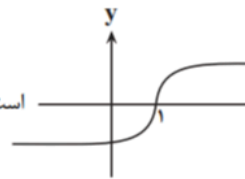
طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f'(1) + f(1) = 4 + 0 = 4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۱

می‌دانیم نمودار $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ به صورت x است. در $x=1$ نمودار دارای مماس قائم است، پس $f'(1)$ قابل تعریف نمی‌باشد و داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

یعنی در اطراف $x=1$ نمودار f' به شکل است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۲

راه حل اول: ابتدا با استفاده از فرمول‌های مشتق، مشتق عبارت را بدست آورده و سپس $x=1$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$u = x^2 - x \rightarrow u' = 2x - 1 \quad v = \sqrt[3]{9x+7} \rightarrow v' = \frac{9}{\sqrt[3]{(9x+7)^2}} \rightarrow u'v + v'u \rightarrow (2x-1)(\sqrt[3]{9x+7}) + \left(\frac{9}{\sqrt[3]{(9x+7)^2}}\right)(x^2-x)$$

$$\xrightarrow{x=1} \sqrt[3]{9(1)+7} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)\sqrt[3]{9x+7} \xrightarrow{x=1} (1)\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

راه حل دوم: با استفاده از مشتق عامل صفرشونده، داریم:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۳

باید ریشه‌های داخل قدر مطلق و نقاط مرزی را چک کنیم. تابع در نقاط مرزی ناپیوسته است.

$$\text{ریشه‌های مرزی} \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \quad \text{ریشه‌های داخل} \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{قدر مطلق}$$

در نتیجه در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

ابتدا باید ببینیم در چه طولی شیب خط مماس بر منحنی با شیب خط $y = -4x - 3$ برابر می‌شود.

۴۴

$$2x - 2 = -4 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -4 \times (-1) - 3 = 1$$

$$2x - 2 = -4 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -4 \times (-1) - 3 = 1$$

پس نقطه با مختصات $(-1, 1)$ باید روی سهمی جدید با معادله $y = x^2 - 2x + 2 + k$ قرار داشته باشد.

$$1 = (-1)^2 - 2(-1) + 2 + k \Rightarrow 1 = 1 + 2 + 2 + k \Rightarrow k = -4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

برای داشتن مماس مشترک در $x = 2$ لازم است که:

۴۵

$$f(2) = g(2), f'(2) = g'(2) \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2 - 1 = \sqrt{2a + b} \Rightarrow \sqrt{2a + b} = 1 \\ 2(2) - 1 = \frac{a}{2\sqrt{2a + b}} \rightarrow 3 = \frac{a}{2(1)} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = -11 \end{cases}$$

پس $g(x) = \sqrt{6x - 11}$ و بنابراین $g^{-1}(2) = \frac{5}{2}$ داریم:

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 1 = 4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x+1} \quad f(0) = \frac{3(0)^2 + 5(0)}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad f(3) = \frac{3(3)^2 + 5(3)}{3+1} = \frac{27+15}{4} = \frac{42}{4}$$

۴۶

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\frac{42}{4} - 0}{3} = \left(\frac{\frac{42}{4}}{3}\right) = \frac{42}{3 \times 4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3.5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

آهنگ متوسط حرکت در بازه a تا b مساوی است با $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ پس:

۴۷

$$\frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{(16 + 12 + 1) - (4 + 6 + 1)}{2} = \frac{29 - 11}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad x'(t) = 2t + 3 \xrightarrow{t=2} 7 \quad \Rightarrow 9 - 7 = 2 \text{ اختلاف}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{\frac{a}{5} - \frac{a}{4}}{4} = \frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{-1}{5} a = \frac{-1}{10} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

۴۸

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow a \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$$

۴۹

$$\begin{aligned} [a, b] \text{ آهنگ متوسط تغییر در بازه: } \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a}}{b - a} = \frac{\frac{1-a - (1-b)}{(1-b)(1-a)}}{b - a} = \frac{(b-a)}{(b-a)(1-b)(1-a)} \\ &= \frac{1}{(1-b)(1-a)} \Rightarrow \frac{2}{(1-a)^2} = \frac{1}{(1-b)(1-a)} \xrightarrow{a \neq 1} \frac{2}{1-a} = \frac{1}{1-b} \rightarrow 2 - 2b = 1 - a \rightarrow 1 + a = 2b \rightarrow b = \frac{1+a}{2} \end{aligned}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

آهنگ متوسط حرکت در بازه $[a, b]$ مساوی است با:

۵۰

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

پس:

$$\frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = \frac{(16 + 12 + 1) - (4 + 6 + 1)}{2} = \frac{29 - 11}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad x'(t) = 2t + 3 \xrightarrow{t=2} = 7 \quad \Rightarrow 9 - 7 = 2 \text{ اختلاف}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$\Rightarrow f'(2) = f'_+(2) = f'_-(2)$ می‌کنیم $\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 4 = 4a + 2b(1)$

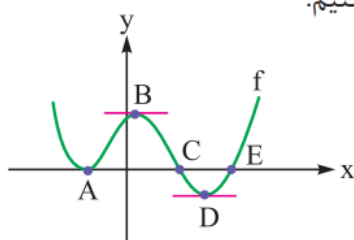
۵۱

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x+6}} = 2ax + b \Rightarrow 4a + b = \frac{1}{3} \quad (2) \quad (1), (2) \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a + b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{11}{3} \\ a = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a.b = -\frac{55}{18}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

گام اول: نقاطی را که مقدار تابع یا مشتق تابع و یا هر دو در آن‌ها صفر شده است، مشخص می‌کنیم:

۵۲



گام دوم: می‌دانیم در نقاطی که مماس افقی داریم، مشتق تابع برابر صفر است، با توجه به این موضوع، نقاط مشخص شده را بررسی می‌کنیم:

(A): هم مقدار تابع و هم مقدار مشتق آن صفر شده است ✗

(B): فقط مقدار مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است ✓

(C): فقط مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است ✓

(D): فقط مقدار مشتق در این نقطه صفر است ✓

(E): فقط مقدار تابع در این نقطه صفر است ✓

بنابراین نقاط B, C, D و E خواسته مسئله را برآورده می‌کنند؛ یعنی چهار نقطه.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۳

گام اول: خط d بر هر دو نمودار مماس است، یعنی $g'(0)$ و $f'(2)$ هر دو برابر با شیب خط d هستند، که آن را m در نظر می‌گیریم. حال طبق فرض سؤال داریم:

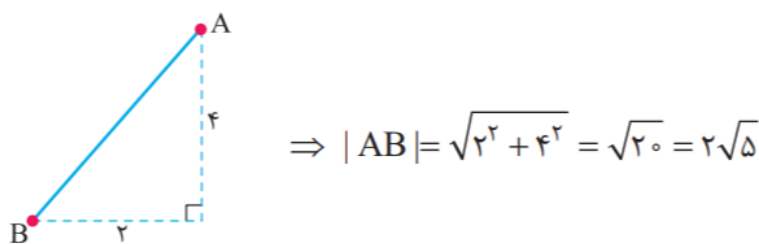
$$3m + m = 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

گام دوم: خطی که از نقاط A و B می‌گذرد، دارای شیب ۲ است.

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{2} = 2 \Rightarrow y_B - y_A = 4$$

برابر ۲ است.

با توجه به این که شیب خطی d برابر ۲ است، پس به ازای هر واحد جابه‌جایی روی محور x ها، ۲ واحد روی محور y ها جابه‌جا می‌شویم، این یعنی چنین مثلثی را می‌توانیم متصور شویم:



(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۴

در یک همسایگی $x = 0$ ، حد تابع $y = x^2[x]$ برابر صفر است، پس تابع f در این همسایگی با تابع $y = 4x$ مساوی است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 0}{x - 0} = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۵

گام اول: حاصل‌ضرب $f(a)$ و $f^{-1}(a)$ منفی است، در نتیجه شیب خط مماس بر f در $x = a$ با $f(a)$ غیر هم‌علامت است.

گام دوم: به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f'(a) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(a)f'(a) > 0 \quad \times$$

گزینه (۱):

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f'(a) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a)f'(a) < 0 \quad \checkmark$$

گزینه (۲):

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(a)f'(a) = 0 \quad \times$$

گزینه (۳):

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(a)f'(a) = 0 \quad \times$$

گزینه (۴):

پس گزینه (۲) صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۶

گام اول: از آن جایی که تابع f در $x = 2$ مشتق ناپذیر است و f نیز به صورت تابع قدرمطلق است، نتیجه می گیریم که $x = 2$ ریشه داخل قدرمطلق است:

$$f(2) = 0 \Rightarrow |3 - a| = 0 \Rightarrow a = 3$$

گام دوم: پس $f(x) = ||x^2 - 1| - 3|$ است. این تابع در نقاطی که ریشه داخل قدرمطلق هستند، مشتق ناپذیر است:

$$1) |x^2 - 1| = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$2) |x^2 - 1| - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

پس نقاط مشتق ناپذیری تابع f ، $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$ هستند که حاصل ضربشان برابر با ۴ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۷

گام اول: با فاکتورگیری از $|x - 1|$ ضابطه f را ساده تر می کنیم.

$$f(x) = |x^2 - 1| + a|x - 1| \Rightarrow f(x) = |x - 1||x + 1| + a|x - 1| \Rightarrow f(x) = |x - 1|(|x + 1| + a)$$

گام دوم: این تابع در $x = -1$ مشتق ناپذیر است و چون فقط یک نقطه مشتق ناپذیر داریم، باید در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، پس با توجه به نکته گفته شده عبارت $|x + 1| + a$ به ازای $x = 1$ باید برابر صفر شود.

$$|1 + 1| + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۸

گام اول: مشتق تابع $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \xrightarrow{x=2} \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)}$$

$$\left(\frac{f(2)}{g(2)}\right)' = \frac{5}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5}{3}$$

گام دوم: مقدار هم صورت و هم مخرج در سؤال داده شده است؛ پس داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۹

گام اول: ابتدا با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ را که همان مشتق چپ است، به دست می آوریم:

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \xrightarrow{f(2)=0} f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overbrace{|x^2 - 4|}^{\text{منفی}}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$$

گام دوم: حالا شیب نیم مماس را داریم و معادله آن را می نویسیم:

$$y - 0 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 8$$

گام سوم: پس $a = -4$ و $b = 8$ ، پس $a + b = 4$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۰

گام اول: با توجه به نمودارهای داده شده، $f(2) = 3$ است، پس در حد خواسته شده می توانیم به جای ۳ عبارت $f(2)$ را قرار دهیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2})$$

گام دوم: حد حاصل ضرب را به صورت حاصل ضرب حدها می نویسیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \Delta f'(2)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۱

گام اول: با توجه به این که ریشه ساده قدرمطلق، نقطه گوشه است داریم:

$$2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

گام دوم: حال برای پیدا کردن شیب نیم مماس ها در نقطه گوشه ای، مشتق های چپ و راست تابع f را در $x = 2$ محاسبه می کنیم:

$$f(x) = \frac{b|x-2|}{2x-[x]} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{b(x-2)}{2x-[x]} - \frac{b}{2}}{x - 2} = \frac{b}{2} \\ f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{-b(x-2)}{2x-[x]} - \frac{b}{2}}{x - 2} = \frac{-b}{2} \end{cases}$$

گام سوم: نیم مماس ها بر هم عمودند، در نتیجه:

$$\left(\frac{-b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

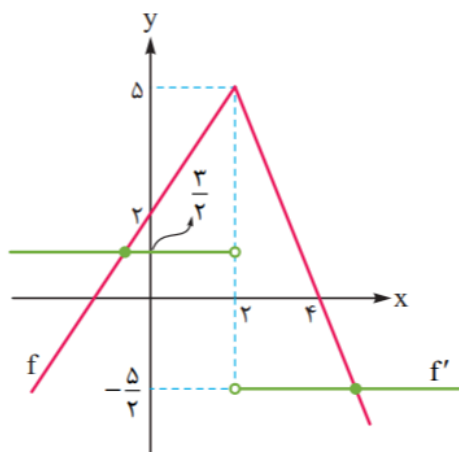
گام اول: نمودار داده شده مربوط به یک تابع دوضابطه‌ای است. ضابطه‌های آن را می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 2 & ; x \leq 2 \\ -\frac{5}{2}x + 10 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

و حالا تابع مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & ; x < 2 \\ -\frac{5}{2} & ; x > 2 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع پله‌ای f' را در کنار نمودار تابع f رسم می‌کنیم:



مشخص است که دو نمودار در ناحیه‌های دوم و چهارم متقاطع‌اند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: با توجه به این که مشتق هر دو تابع را در $x = 2/25$ می‌خواهیم حساب کنیم، اول ضابطه تابع $f - 2g$ را می‌سازیم:

$$g(x) = \frac{2(2 + \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} = \frac{4 + 2\sqrt{x}}{4 - x} \Rightarrow (f - 2g)(x) = f(x) - 2g(x) = \frac{4 + x\sqrt{x} - 4 - 4\sqrt{x}}{4 - x}$$

$$= \frac{(x - 4)\sqrt{x}}{4 - x} = -\sqrt{x}$$

گام دوم: پس کافی است از تابع $y = -\sqrt{x}$ مشتق بگیریم:

$$(f - 2g)'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=2/25} (f - 2g)'(2/25) = \frac{-1}{2 \times 1/5} = -\frac{1}{3}$$

پس $f'(2/25) - 2g'(2/25) = -\frac{1}{3}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: ۶۴

$$f(x) = x^{2n} + x^{n+1} - x^n + x - 1$$

گام دوم: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} + (n+1)x^n - nx^{n-1} + 1$$

گام سوم: یک بار دیگر مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} + n(n+1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2}$$

گام چهارم: حالا $x=1$ را در ضابطه تابع f'' جای‌گذاری می‌کنیم و حاصل را برابر ۲۵۶ قرار می‌دهیم:

$$g'(1) = 4n^2 - 2n + n^2 + n - n^2 + n = 4n^2 = 256$$

واضح است که تساوی بالا به ازای $n=8$ برقرار است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0,1]$ محاسبه می‌کنیم: ۶۵

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازه } [0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(a+1) \times 2 - 1}{1} = \frac{2a+1}{1} = 5 \Rightarrow a=2$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=1$ برابر است با $f'(1)$ ، بنابراین داریم:

$$f(x) = (2x+1)\sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{3x+1} + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(2x+1)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 4 + \frac{9}{4} = 6\frac{1}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: با توجه به این که توابع شامل براکت، در نقاطی که داخل براکت عددی صحیح شود ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. ۶۶

گام دوم: در گزینه‌های (۳) و (۴) تنها عددهای عضو بازه که داخل براکت عددی صحیح می‌شود در ابتدا و انتهای بازه قرار دارند، پس کافی است مشتق‌پذیری چپ یا راست بررسی شود:

پیوستگی راست ندارد، در نتیجه مشتق‌پذیر نیست. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = x[1^-] = 0 \neq f(-1)$ گزینه (۳)

پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ گزینه (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x[x^2] - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2] = 0$$

گام سوم: در نتیجه تابع f روی بازه $[-1,0]$ مشتق‌پذیر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۷

$$\text{یادآوری: } f'(a) \times g'(f(a)) = (g \circ f)'(a)$$

$$\Rightarrow f'(\varphi) \times g'(f(\varphi)) = (g \circ f)'(\varphi)$$

ابتدا تابع f را بدست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2; (x \geq 0) \Rightarrow y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 2} \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{y - 2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2}$$

$$g \circ f(x) = g(\sqrt{x - 2}) = \frac{(\sqrt{x - 2})^2}{(\sqrt{x - 2})^2 + 1} = \frac{x - 2}{x - 1}$$

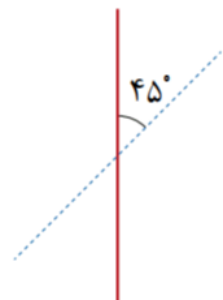
$$(g \circ f)'(x) = \frac{-1 - (-2)}{(x - 1)^2} = \frac{1}{(x - 1)^2} \xrightarrow{x=4} \frac{1}{9}$$

یادآوری:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۸



f در $x = 1$ خط مماس قائم دارد. تابع f اکیداً صعودی است. پس خطوط مماس به صورت زیر است. در واقع شیب خط مماس در $x = \alpha$ برابر ۱ است.

$$f'(\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{3}{3\sqrt[3]{(3\alpha - 3)^2}} = 1 \Rightarrow 3\alpha - 3 = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \text{ یا } \frac{2}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۹

نقطه تماس را $A(a, 0)$ در نظر بگیرید. شیب مماس برابر $y' = 2x - a = 2a - a = a$ است. پس شیب AM برابر $-\frac{1}{a}$ است. از طرفی:

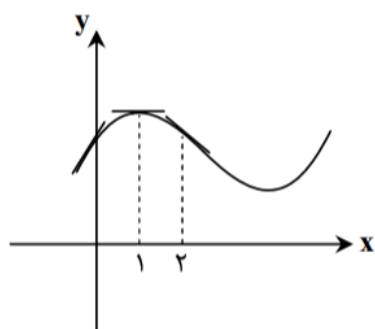
$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{4 + 2a - 0}{-2 - a} = -2 \Rightarrow -\frac{1}{a} = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷۰

می‌دانیم $f'(\cdot)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$ با شیب خط مماس در این نقاط برابر است.

با توجه به شکل داریم:



$$\Rightarrow f'(\cdot) > 0, f'(1) = 0, f'(2) < 0.$$

اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱: نادرست

$$f'(\cdot) > 0, f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) - f'(\cdot) < 0.$$

گزینه ۲: نادرست

$$f'(\cdot) > 0, f'(2) < 0 \Rightarrow f'(\cdot) \cdot f'(2) < 0.$$

گزینه ۳: درست

$$f'(2) < 0, f'(1) = 0 \Rightarrow f'(2) + f'(1) < 0, f'(\cdot) > 0.$$

گزینه ۴: نادرست؛ $f'(1) = 0$ ، اما نمی‌توان گفت که $f'(2) + f'(\cdot)$ دقیقاً صفر است، زیرا ممکن است $f'(2) + f'(\cdot)$ منفی یا مثبت یا صفر باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۱

با استفاده از قوانین مشتق‌گیری، مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x^3 - 2x + a)(x^2 - 4x) \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - 2)(x^2 - 4x) + (2x - 4)(x^3 - 2x + a)$$

$$\xrightarrow{f'(1)=0} f'(1) = (1)(-3) + (-2)(-1 + a) = 0 \Rightarrow -3 + 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۲

با استفاده از قوانین مشتق‌گیری، مشتق تابع موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - 1 \times (x^2 + 1)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 10}{(x-3)^2}$$

بنابراین مقدار $f'(3 + \sqrt{5})$ برابر است با:

$$f'(3 + \sqrt{5}) = \frac{(3 + \sqrt{5} - 3)^2 - 10}{(3 + \sqrt{5} - 3)^2} = \frac{5 - 10}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۳

تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است، پس تابع f در $x = 2$ پیوسته است و $f'_-(2) = f'_+(2)$. حال داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & x \geq 2 \\ ax^2 + b & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4a + b = 3 \quad (*)$$

اکنون مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} & x \geq 2 \Rightarrow f'_+(2) = \frac{4}{2\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\ 2ax & x < 2 \Rightarrow f'_-(2) = 4a \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow \frac{2}{3} = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{6} \xrightarrow{(*)} b = \frac{7}{3} \Rightarrow a \cdot b = \frac{7}{18}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۴

ابتدا نقطهٔ تماس را به دست می آوریم:

$$f(x) = (x^4 - 2x)^4 + 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow A(1, 2) \text{ نقطهٔ تماس}$$

اکنون با محاسبهٔ $f'(x)$ به کمک قاعدهٔ زنجیری و سپس محاسبهٔ $f'(1)$ ، شیب خط مماس را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 4(x^4 - 2x)^3 (4x^3 - 2) \xrightarrow{x=1} f'(1) = 4(-1)^3 (2) \Rightarrow f'(1) = -8 \Rightarrow m = -8 \text{ (شیب خط مماس)}$$

حال معادلهٔ خط مماس را می نویسیم:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ A(1, 2), m = -8 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = -8(x - 1) \Rightarrow y = -8x + 10$$

پس عرض از مبدأ خط مماس برابر ۱۰ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۵

ابتدا داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=2} (fog)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2))$$

اکنون $g(2)$ و $g'(2)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 6 \\ g'(2) = 6 \end{cases}$$

بنابراین:

$$g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6f'(6) \xrightarrow{\frac{f'(x)=\sqrt{7-x}}{f'(6)=1}} (fog)'(2) = 6 \times 1 = 6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۶

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ در بازه $[13, 25]$ برابر است با:

$$\frac{f(25) - f(13)}{25 - 13} = \frac{\sqrt{50-1} - \sqrt{26-1}}{12} = \frac{7-5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f باید برابر $\frac{1}{6}$ باشد:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{6} &\Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 6 \\ \Rightarrow 2x-1 &= 36 \Rightarrow 2x = 37 \\ \Rightarrow x &= \frac{37}{2} \Rightarrow x = 18.5 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۷

شیب خط مماس برابر ۱- است.

$$-1 = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-a}{2-2a-2} = \frac{2-a}{-2a} \Rightarrow 2a = 2-a \Rightarrow a = 1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۸

شیب خط برابر $-\frac{3}{7}$ است، پس شیب مماس یا همان y' برابر $\frac{7}{3}$ است.

$$y' = 3x^2 + 2 \Rightarrow 3x^2 + 2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۷۹

پاسخ: ضابطه تابع f را محاسبه می‌کنیم.

$$f^{-1}(\sqrt[3]{x} + 1) = x^3 + x \rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = f(x^3 + x)$$

از دو طرف تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$(3x^2 + 1)f'(x^3 + x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(3+1)f'(2) = \frac{1}{3} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{12}$$

به جای x مقدار یک را جایگذاری می‌کنیم.

مقدار مشتق تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر $\frac{1}{12}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)